Optimaal Sturen. *24C-20PI-120(2)*
Keuze voor doctoraal
Gewenste voorkennis: A100-008, A100-21
Docent: Dr. Ir. L.G. van Willigenburg, Vakgroep Agrotechniek en Fysica, Sectie Meet Regel en Systeemtechniek, Agrotechnion, kamer 3011 (derde verdieping), tel. 2941.

Aard en inhoud van het college:

De meeste landbouwkundige, industriele, fysische en eco systemen hebben een *dynamisch niet lineair multi-input multi-output* karakter. De klassieke regeltheorie houdt zich uitsluitend bezig met de regeling van *dynamische lineaire single-input single-output* systemen. De moderne regeltheorie houdt zich overwegend bezig met de regeling van *dynamische lineaire multi-input multi-output* systemen. In dit college worden analytische en numerieke technieken gepresenteerd die resulteren in het ontwerp en de realisatie van regelalgorithmes voor *dynamische niet lineaire multi-input multi-output* continue en discrete-tijd systemen. De laatste categorie is van belang bij het ontwerp en de realisatie van digitale besturingssystemen, d.w.z. systemen bestuurd d.m.v. een digitale computer. Gezien het niet lineaire karakter van de beschouwde systemen en het numerieke karakter van de oplossingen, zijn de resultaten rechtstreeks van toepassing op *veel praktische regelproblemen* in landbouw en industrie.

Ondanks het sterke wiskundige karakter van het vak is slechts beperkte voorkennis op het gebied van lineaire algebra en differentiaal vergelijkingen gewenst. De inleiding van het college zal bestaan uit de behandeling (herhaling) van een aantal fundamentele zaken op het gebied van lineaire algebra en differentiaal vergelijkingen, welke voor het college van groot belang zijn.

Leerdoelen:

- Het verschaffen van inzicht in niet lineaire systemen en het ontwerp van digitale besturingen voor dit type systemen.
- Het vertrouwd maken met het gebruik van software voor het numeriek oplossen van niet lineaire dynamische optimale sturings problemen.
- Bereiken van zelfstandigheid t.a.v. het categoriseren en zo mogelijk numeriek oplossen van niet lineaire dynamische optimale sturings problemen.

Leeractiviteiten:

Hoorcollege,bestudering bijbehorend boek, en toepassing op praktische problemen tijdens het practicum.

Beoordelingsprocedure:

Tentamen 60% (voldoende verplicht)
Practicum 40% (voldoende verplicht)

Wat de boer niet kent . . . . tragiek der moderne systeem en regeltheorie.

Dr. Ir. L.G. van Willigenburg
L.U. Wageningen
Vakgroep Agro-techniek en Fysica
Sectie Meet-Regel en Systeem techniek
Duivendaal 1
6701 AP Wageningen.

Samenvatting

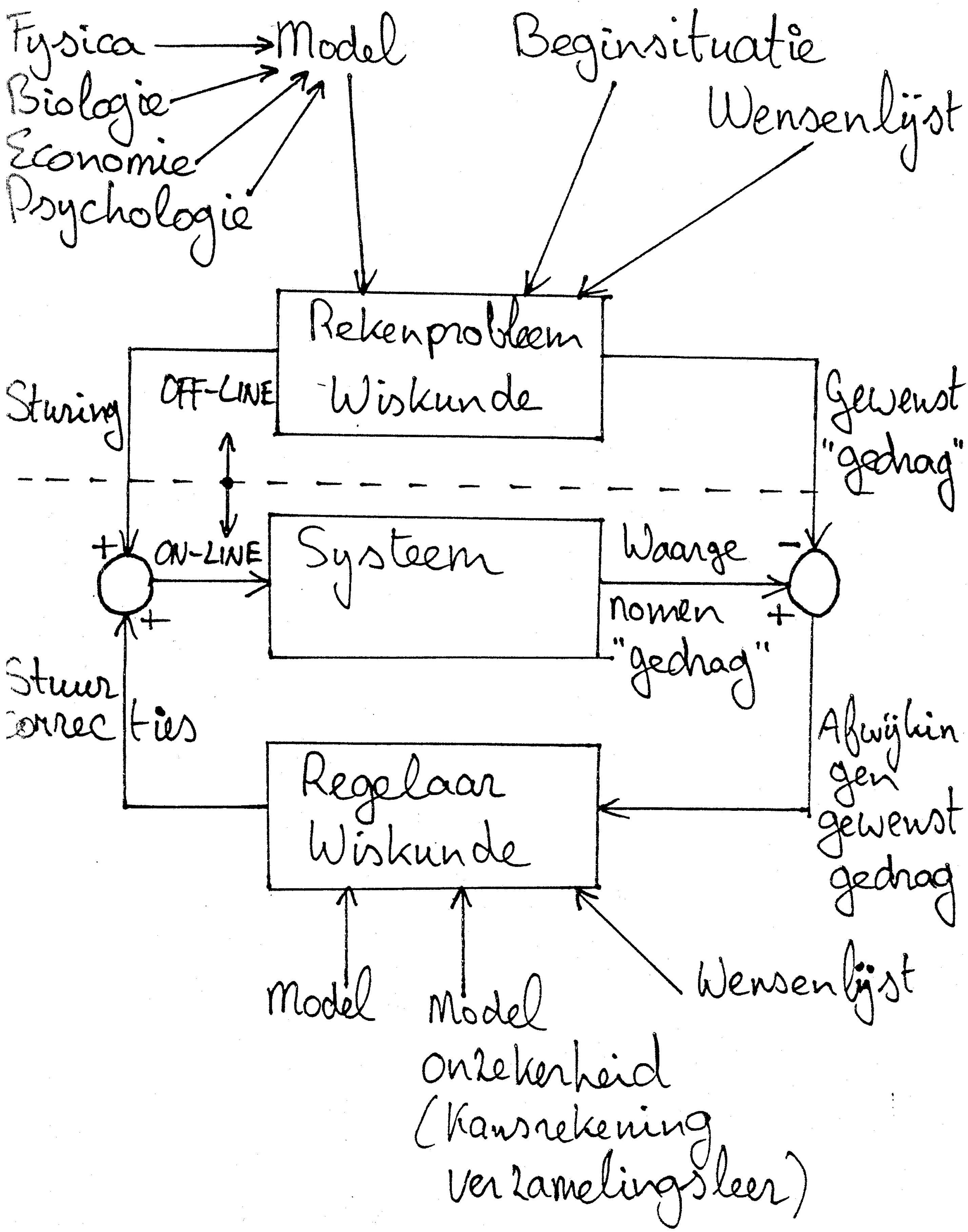
Op basis van eigen bizarre ervaringen, zal ik verhalen van de "ontdekking" van het fenomeen "Kalman" naast het wellicht iets minder fenomeen "Pontryagin" en één prima vertolker van de fenomenale ideeën op het gebied van besturing die de combinatie van deze fenomenen oplevert.

In een wereld waar managers de baas zijn zou je verwachten dat de modernste ideeën op het gebied van besturen ruimschoots worden toegepast. Niets is echter minder waar en daarin schuilt de tragiek. Over mogelijke oorzaken zal worden gefilosofeerd.

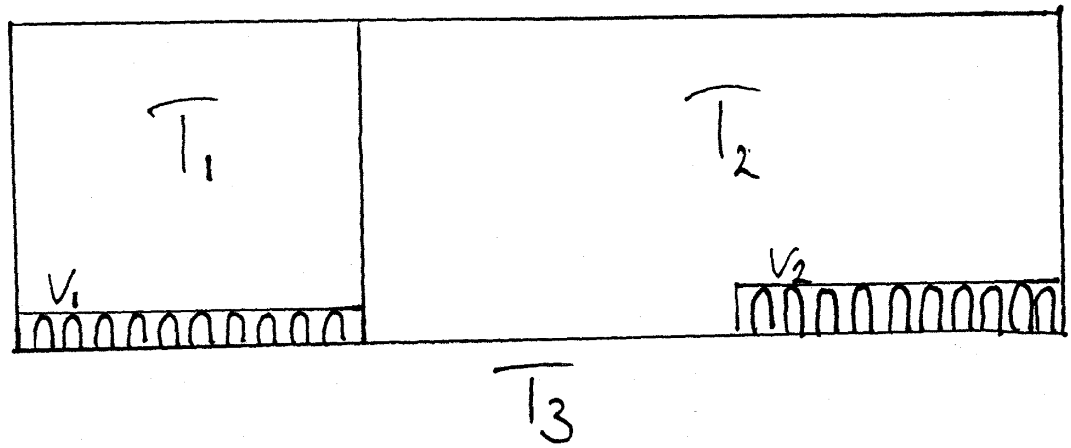
Pas of bijna afgestudeerden verhuizen in veel gevallen van een beschermd academisch milieu naar de harde werkelijkheid van de toepassing, bureaucratie en hierarchie. De toepassing kan aanleiding zijn tot het verwerpen van "academische" oplossingen. Academici zijn geneigd de werkelijkheid aan hun ideeën aan te passen. Een bureaucratie en hierarchie hebben daarentegen een haast onverwoestbare neiging alles bij het oude te laten, en kunnen uitsluitend effectief worden bestreden door afgestudeerden die hun "academische" vorming niet verloochenen. Een goed idee blijft altijd een goed idee.

Over laten we zeggen een jaar of tien, wanneer SOR ongetwijfeld is uitgegroeid tot een begrip, en we bovendien in een nieuwe eeuw zijn beland, wat psychologisch niet onvoordelig lijkt, zullen we de balans opmaken en zien hoe de wereld dan wordt bestuurd. Aan de academici, en zeker deze, zal het niet liggen...............

Een Optimaal Besturingssysteem



Temperatuur Regeling van twee aangrenzende ruimten

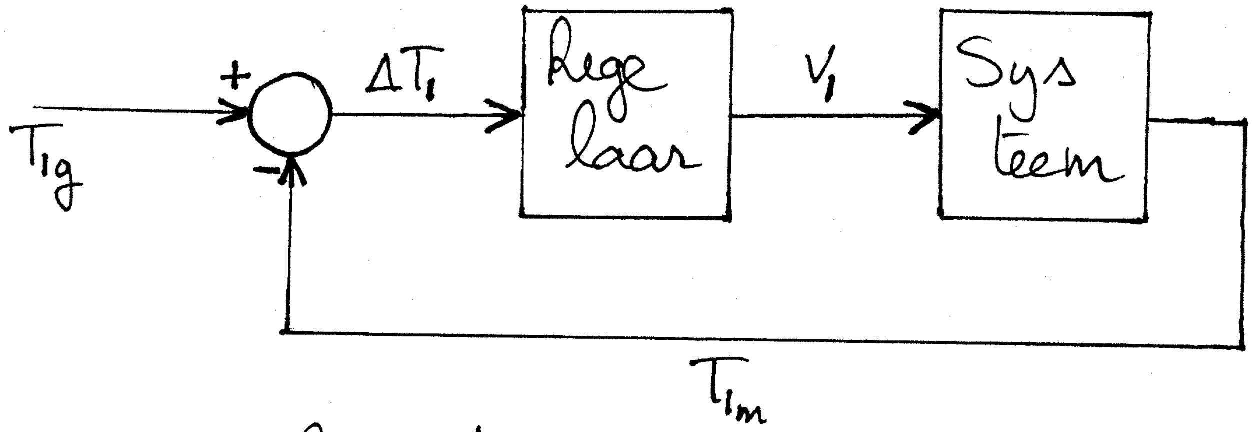


T_1, T_2, T_3 : temperaturen (systeemgrootheden)
V_1, V_2 : verwarming (stuurvariabelen)
(koeling)

Doelstellingen

1) T_1, T_2 constant
2) T_1, T_2 zo snel mogelijk naar bepaalde waarden brengen
3) 1) en 2) rekening houdend met energiekosten
4) T_1, T_2 een bepaald verloop geven
5) 4) rekening houdend met energiekosten

"Klassieke" Regeling

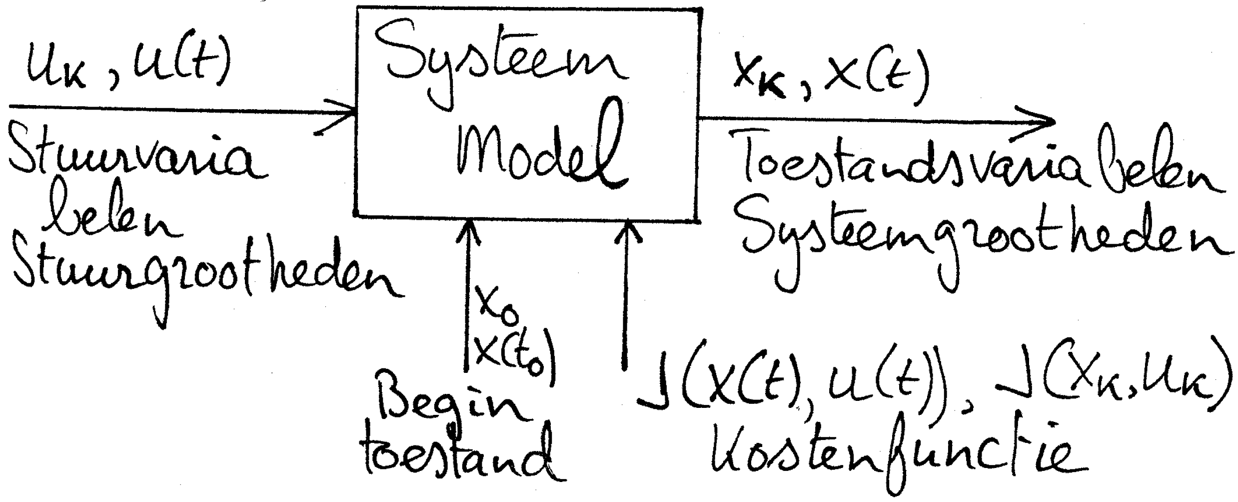


T_{1g} : Gewenste waarde T_1, Setpoint T_1
T_{1m} : Gemeten waarde T_1
ΔT_1 : Verschil $T_{1g} - T_{1m}$
V_1 : Verwarming (Stuurvariabele, sturing)

Kenmerken

- Voor verwarming $\Delta T_1 \neq 0$ nodig: Regeling per definitie niet exact
- De te regelen grootheid moet worden gemeten
- Ontwerp regeling meestal gebaseerd op vuist (instel) regels, geen gebruik van systeem (model) kennis
- Invloed van andere regelingen (delen van het systeem) vormen verstoringen voor het regelsysteem
- Eén ingang: T_{1g} één uitgang: T_{1m} (Single Input Single Output SISO)

Optimaal Sturingsprobleem



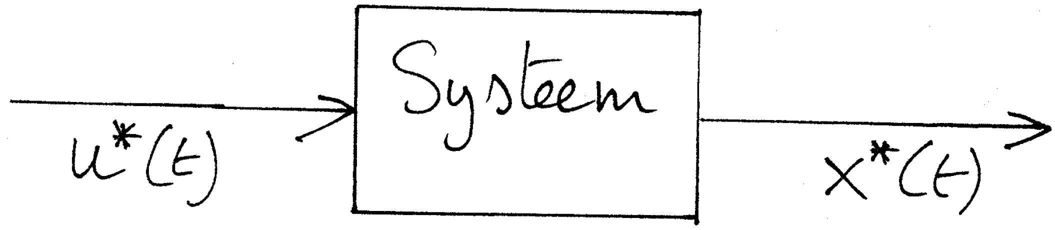
- Optimaal Sturingsprobleem:
  Vindt $u_K, u(t)$ zodanig dat het systeem voldoet aan gestelde eisen gegeven de begintoestand
- Eisen vertalen naar een kostenfunctie (criterium)

- Optimaal Sturingsprobleem:
  Vindt $u_K, u(t)$ zodanig dat het criterium (de kostenfunctie) $J(x(t), u(t))$, $J(x_K, u_K)$ wordt geminimaliseerd gegeven de begintoestand

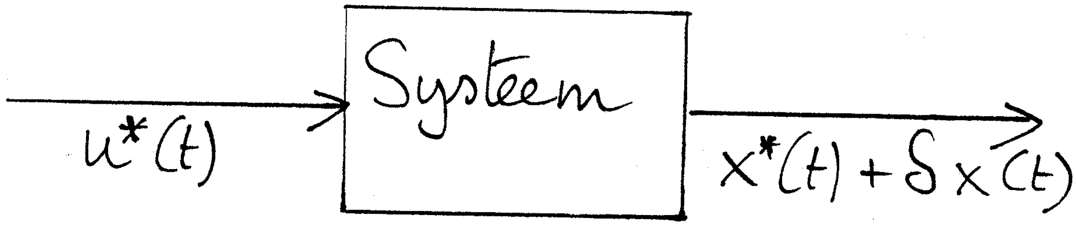
Oplossing optimaal sturingsprobleem:

$u^*(t), x^*(t) \quad t \in [t_0, t_f] \; (t_0 \leq t \leq t_f)$

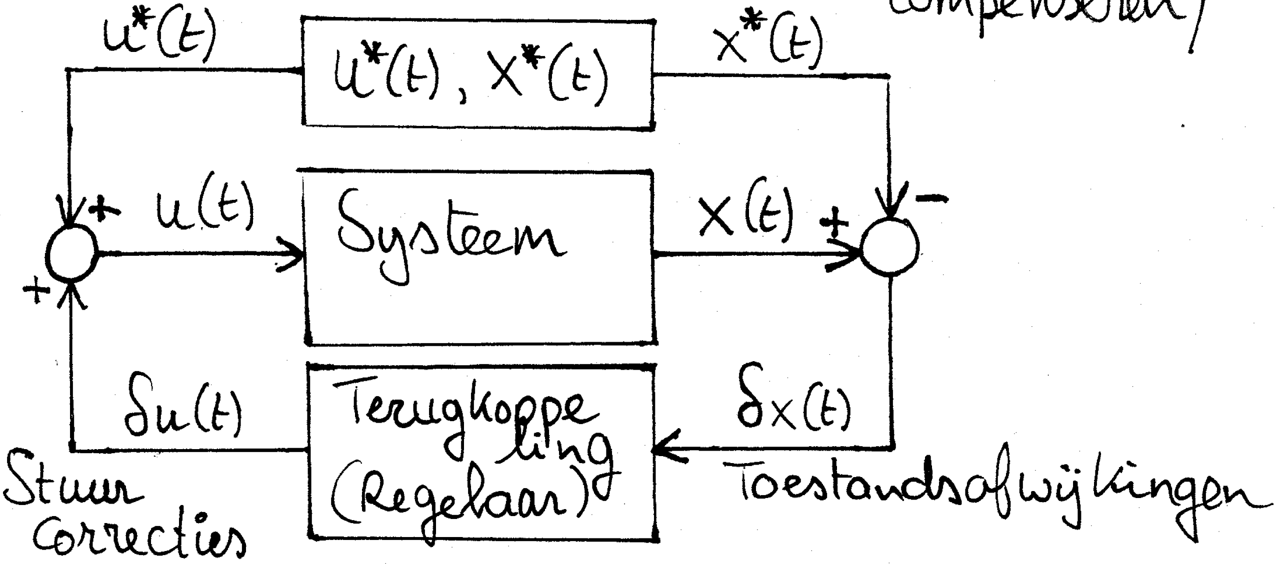
- Indien model en begintoestand exact:



- Indien model en/of begintoestand niet exact:

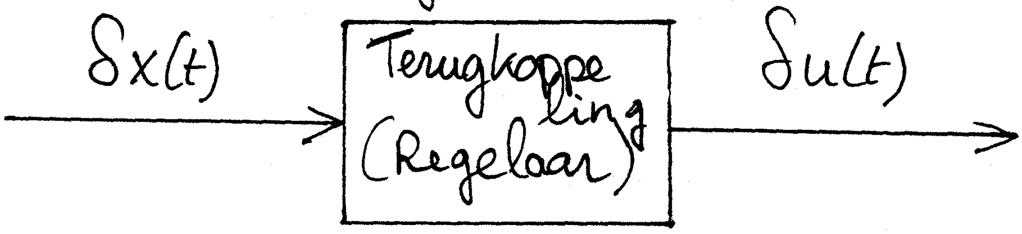


- Beperken $\delta x(t)$: Regelen (terugkoppelen compenseren)

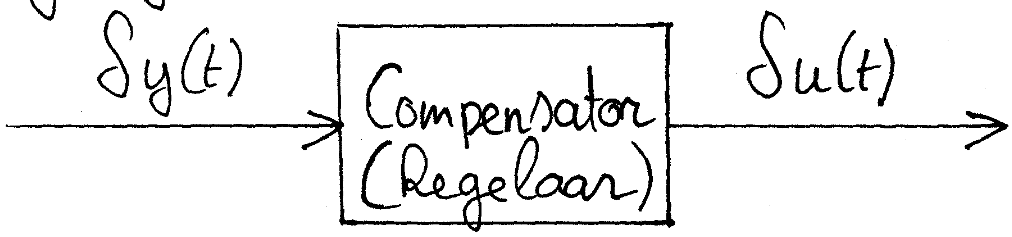


Terugkoppeling en Compensator

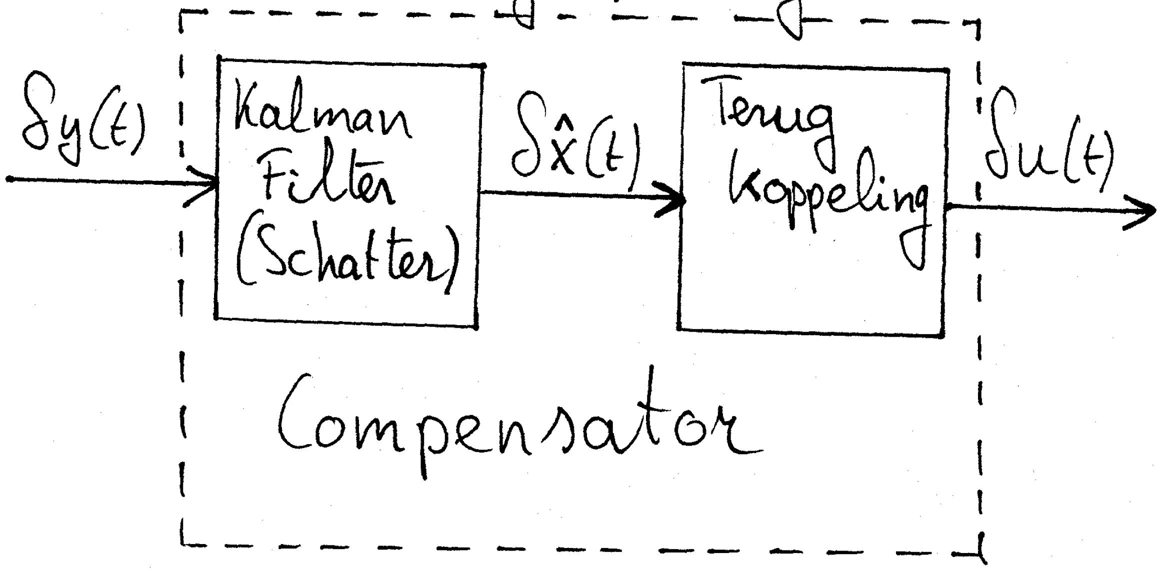
- Als alle toestandsvariabelen (de toestand) worden gemeten



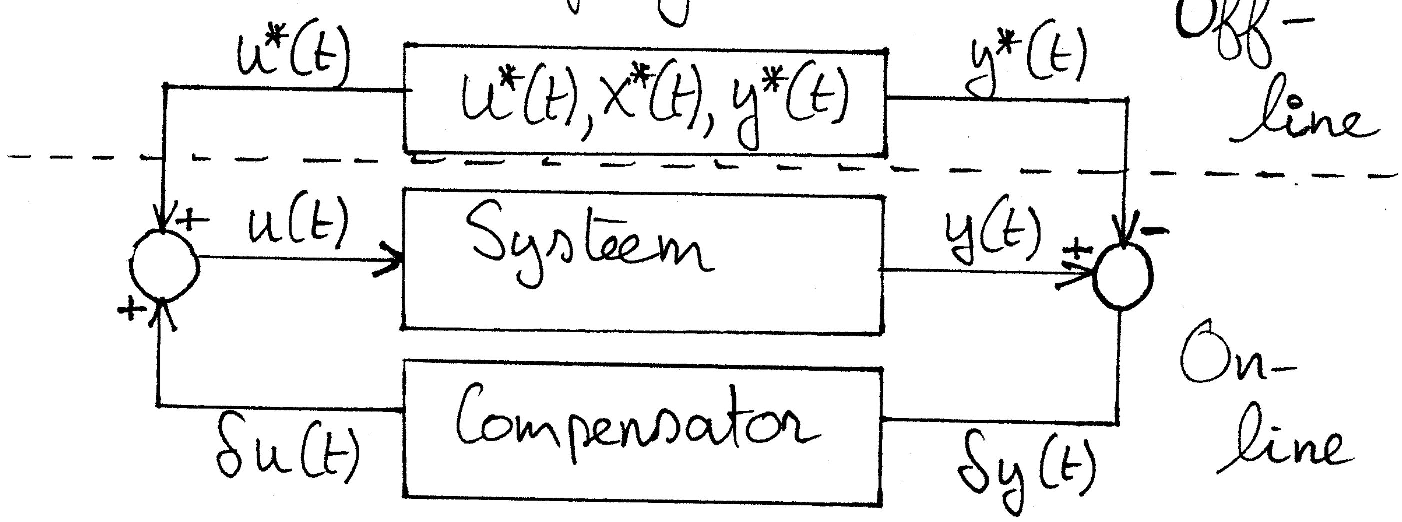
- Bij willekeurige uitgangsvariabelen $y = g(x, u, d, t)$



Compensator : Kalman Filter (Schatter) + Terugkoppeling



"Klassiek" versus "Modern" Regelsysteem



Klassiek	Modern
- Alle te regelen grootheden worden gemeten	- "Willekeurige" metingen waaruit afwijkingen worden gereconstrueerd
- Alleen toepasbaar op systemen met 1 ingang en 1 uitgang: interacties vormen verstoringen	- Toepasbaar op systemen met meerdere in en uitgangen: houdt rekening met interacties
- Regelaarontwerp gebaseerd op vuistregels	- Regelaarontwerp gebaseerd op systeemkennis en een kostenfunctie (criterium)
- Problematisch bij toepassing op (sterk) niet lineaire systemen	- met niet lineariteit wordt expliciet rekening gehouden als deze deel uitmaakt van het model (de systeem kennis)
- Polen, Nulpunten, Stapresponsies, δ functies, Fourier Laplace transformatie	- Integreren, differentieren, lineaire algebra, functionaal analyse
- Frequentiedomein	- Tijddomein

Continue-tijd systemen: Beschrijving in toestandsvorm

Voorbeeld

- $$\frac{d^3T}{dt^3} = p_1\frac{d^2T}{dt^2} + p_2T + p_3\frac{dS}{dt} + p_4S + Q$$
  $$\frac{d^2S}{dt^2} = p_5\frac{d^2T}{dt^2} + p_6\frac{dS}{dt} + p_7S + P$$

  Q: Externe variabele

  P: Stuurvariabele

  $p_1 - p_7$: (systeem) parameters

- $u_1 = P, d_1 = Q, x_1 = T, x_2 = \frac{dT}{dt}, x_3 = \frac{d^2T}{dt^2}$
  $x_4 = S, x_5 = \frac{dS}{dt}$ (doornummeren tot op 1 na hoogste afgeleiden)

- Toestandsvorm: 1e orde differentiaal vergelijkingen

  $$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
  $$\frac{dx_2}{dt} = x_3$$
  $$\frac{dx_3}{dt} = p_1x_3 + p_2x_1 + p_3x_5 + p_4x_4 + d_1$$
  $$\frac{dx_4}{dt} = x_5$$
  $$\frac{dx_5}{dt} = p_5x_3 + p_6x_5 + p_7x_4 + u_1$$

Definieer:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ \vdots \\ dx_5/dt \end{bmatrix} \quad u = u_1$$

$$d = d_1 \quad f(x,u,d) = \begin{bmatrix} f_1(x,u,d) \\ f_2(x,u,d) \\ \vdots \\ f_5(x,u,d) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ p_1 x_3 + p_2 x_1 + p_3 x_5 + p_4 x_4 + d_1 \\ x_5 \\ p_5 x_3 + p_6 x_5 + p_7 x_4 + u_1 \end{bmatrix}$$

dan: $\boxed{\dot{x} = f(x,u,d)}$

$f_1(x,u,d) \ldots\ldots f_5(x,u,d)$: <u>Scalaire</u> functies van de vectoren x, u, d

$f(x,u,d)$: <u>Vector</u>functie van de vectoren x, u, d

Opmerkingen bij beschrijving in toestandsvorm

- aantal toestandsvariabelen = $\dim(x)$ = dimensie systeem = som van de ordes van de differentiaal vergelijkingen
  Notatie : $\dim(x) = n$, $x \in R^n$
- aantal stuurvariabelen = $\dim(u)$ = dimensie van de sturing
  Notatie : $\dim(u) = m$, $u \in R^m$
- De toestandsvorm is niet uniek maar wel volledig
  Er zijn ∞ veel manieren om hetzelfde systeem in toestandsvorm volledig te beschrijven
- $x, \dot{x}, f \in R^n$, $u \in R^m$ $(d \in R^?)$

Discrete tijd systemen: Beschrijving in toestandsvorm

Voorbeeld

- $T_{k+3} = p_1 T_{k+2} + p_2 T_k + p_3 S_{k+1} + p_4 S_k + Q_k$

  $S_{k+2} = p_5 T_{k+2} + p_6 S_{k+1} + p_7 S_k + P_k$

  Q_k : Externe variabele
  P_k : Stuurvariabele
  $p_1 - p_7$: (systeem) parameters

- $u_k^1 = P_k$, $d_k^1 = Q_k$, $x_k^1 = T_k$, $x_k^2 = T_{k+1}$, $x_k^3 = T_{k+2}$
  $x_k^4 = S_k$, $x_k^5 = S_{k+1}$ (doornummeren tot op 1 na hoogste tijdindex)

- Toestandsvorm: 1^e orde differentie vergelijkingen

$$x_{k+1}^1 = x_k^2$$
$$x_{k+1}^2 = x_k^3$$
$$x_{k+1}^3 = p_1 x_k^3 + p_2 x_k^1 + p_3 x_k^5 + p_4 x_k^4 + d_k^1$$
$$x_{k+1}^4 = x_k^5$$
$$x_{k+1}^5 = p_5 x_k^3 + p_6 x_k^5 + p_7 x_k^4 + u_k^1$$

- Zie verder continue tijd systemen:

$$\boxed{\mathbf{x}_{k+1} = f(x_k, u_k, d_k)}$$

Lineaire Systemen

Notatie in toestandsvorm:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots b_{1m}u_m$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots b_{2m}u_m$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots b_{nm}u_m$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\dot{x} = Ax + Bu \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ B \in \mathbb{R}^{n \times m}}$$

Discrete tijd analoog:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

<u>Tijdafhankelijke</u> lineaire systemen

$$A \rightarrow A(t) \qquad A \rightarrow A_k$$
$$B \rightarrow B(t) \qquad B \rightarrow B_k$$

$$\boxed{\dot{x} = A(t)x + B(t)u \qquad x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k}$$

De matrices A en/of B veranderen als functie van de tijd

Gemeten Systeemgrootheden: Uitgangsvariabelen

- Voor het on-line genereren van stuur correcties $\delta u(t)$ is het noodzakelijk het systeem on-line waar te nemen. D.w.z. er moet on-line aan het systeem worden gemeten
- I.h.a. worden meerdere systeemgrootheden gemeten welke een (niet lineaire) functie zijn van de toestandsvariabelen, externe variabelen, sturing en eventueel de tijd:

$$\boxed{y = g(x, u, d, t) \quad : \text{Uitgangsvergelijking}}$$

- Gegeven de optimale sturing $u^*(t)$ en het bijbehorende verloop $x^*(t)$ volgt daaruit tevens een optimaal verloop van $y(t)$:

$$\boxed{y^*(t) = g(x^*, u^*, d, t)}$$

- $y, y^*, g \in R^l$ $\quad y, y^*$: vectoren met l uitgangsvariabelen
  g : vectorfunctie, $g \in R^l$

Systeem en uitgangsvergelijking
Lineaire en niet lineaire systemen

- Het systeem wordt volledig beschreven door de <u>systeemvergelijking</u>

$$\dot{x} = f(x,u,d,t)$$

en de <u>uitgangsvergelijking</u>

$$y = g(x,u,d,t)$$

ofwel door <u>f en g.</u>

- Het systeem is <u>lineair</u> (in optimale besturingstermen) als <u>zowel</u> f en g lineaire functies zijn van **x** en u (niet noodzakelijk d)

Dan:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)\,x + B(t)\,u + f'(d,t) \\ y &= C(t)\,x + D(t)\,u + g'(d,t) \end{aligned}}$$

$A(t) \in R^{n\times n}$, $B(t) \in R^{n\times m}$,
$C(t) \in R^{l\times n}$, f', g' vectorfuncties
$f' \in R^n$, $g' \in R^l$

Wiskundig gereedschap

Taylorreeks ontwikkelingen

- Scalaire functie van 1 variabele

$f(x)$, $f, x \in R^1$

$f(x+dx) = f(x) + f_x dx + dx\, f_{xx} dx + O(3)$

$f_x \stackrel{def}{=} \frac{df}{dx}$, $f_{xx} \stackrel{def}{=} \frac{d^2 f}{dx^2}$

- Scalaire functie van n variabelen

$f(x)$, $f \in R^1$, $\mathbf{x} \in R^n$, $x = [x_1, x_2 - x_n]^T$

$$f(x+dx) = \underbrace{f(x) + f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \cdots f_{x_n} dx_n}_{1}$$

$$+ \tfrac{1}{2} \underbrace{\left(dx_1 f_{x_1 x_1} dx_1 + dx_1 f_{x_1 x_2} dx_2 + \cdots dx_n f_{x_n x_n} dx_n \right)}_{2}$$

$f_{x_i} \stackrel{def}{=} \frac{df}{dx_i}$ $f_{x_i x_j} \stackrel{def}{=} \frac{d^2 f}{dx_i dx_j}$

1 : $\left[f_{x_1}, f_{x_2}, \cdots f_{x_n} \right] \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} = f_x dx$

2 : $[dx_1, dx_2 \cdots dx_n] \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & - & f_{x_2 x_n} \\ \vdots & & & \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} =$

$(dx)^T f_{xx}\, dx$

<u>Dus $f(x)$, $f \in R^1$, $x \in R^n$:</u>

$$f(x+dx) = f(x) + f_x\,dx + \frac{(dx)^T f_{xx}\,dx}{2} + O(3)$$

$f_x = [f_{x_1}, f_{x_2} \cdots f_{x_n}]$: Rij vector, <u>gradient</u>

$$f_{xx} = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & & & \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

$n \times n$ matrix <u>Hessiaan</u>

- Vectorfunctie van n variabelen (een vector)

$f(x)$, $f \in R^m$, $x \in R^n$

$$f(x+dx) = \begin{bmatrix} f_1(x+dx) \\ f_2(x+dx) \\ \vdots \\ f_m(x+dx) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) + f_{1_x}dx + O(2) \\ f_2(x) + f_{2_x}dx + O(2) \\ \vdots \\ \underbrace{f_m(x)}_{1} + \underbrace{f_{m_x}dx}_{2} + O(2) \end{bmatrix}$$

1 : $f(x)$ 2 : $\underbrace{\begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ \vdots \\ f_{nx} \end{bmatrix}}_{m \times n \text{ matrix}} dx = f_x\,dx$

$m \times n$ matrix : <u>Jacobiaan</u>

Dus $f(x)$, $f \in R^m$, $x \in R^n$:

$$f(x+dx) = f(x) + f_x dx + O(2)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ \vdots \\ f_{mx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1x_1} & f_{1x_2} & \cdots & f_{1x_n} \\ f_{2x_1} & f_{2x_2} & \cdots & f_{2x_n} \\ \vdots \\ f_{mx_1} & f_{mx_2} & \cdots & f_{mx_n} \end{bmatrix} \quad m \times n \text{ Matrix } \underline{\text{Jacobiaan}}$$

Element ij van Jacobiaan $= f_{i x_j} = \dfrac{df_i}{dx_j}$

<u>Opmerking</u>: De definitie van de gradient als zijnde een <u>rijvector</u> is in de hier gepresenteerde context consistent d.w.z. Een scalaire functie kan worden gezien als een speciaal geval van een vector functie $(m=1)$

<u>Lewis</u> en vele andere auteurs definieren de gradient als een <u>kolom</u>vector. In dit geval wijken Taylorreeksontwikkelingen van scalaire functies af van die van vectorfuncties bijv.

Scalaire functie: $f(x+dx) = f(x) + f_x^T dx + O(2)$

Vector functie: $f(x+dx) = f(x) + f_x dx + O(2)$

(zie Lewis blz 340-341
A.4-12 $\Leftrightarrow$ A.4.22 / A.4-10 $\Leftrightarrow$ A4-2

Productregel voor het differentieren van vectorfuncties

$f(x), g(x) \qquad f, g \in R^m, \; x \in R^n$

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\underbrace{(f^T g)}_{\text{scalar}}}_{1\times n} = \underbrace{f^T}_{1\times m}\underbrace{g_x}_{m\times n} + \underbrace{g^T}_{1\times m}\underbrace{f_x}_{m\times n}$$

- Speciale gevallen $x, \lambda, f \in R^n, \; A \in R^{n\times n}$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(\lambda^T x) = \frac{d}{dx}(x^T\lambda) = \lambda^T \\
&\frac{d}{dx}(\lambda^T A x) = \frac{d}{dx}(x^T A^T \lambda) = \lambda^T A \\
&\frac{d}{dx}(\lambda^T f(x)) = \frac{d}{dx}(f^T(x)\lambda) = \lambda^T f_x \\
&\frac{d}{dx}(x^T A x) = x^T(A + A^T)
\end{aligned}\right\}\text{Gradien-ten}$$

$$\text{Jacobiaan}\left\{\frac{d}{dx}(Ax) = A \quad \left(\text{Volgt uit definitie } \frac{df(x)}{dx} = f_x\right)\right.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2 x^T A x}{dx^2} = A + A^T \\
&\frac{d^2}{dx^2}(x-\lambda)^T A (x-\lambda) = A + A^T
\end{aligned}\right\}\text{Hessianen}$$

Linearisatie van Vectorfuncties en Systemen

- Linearisatie van $f(x)$ rond $x = x_0$: $f_x(x_0)$
- $f_x(x_0)$ beschrijft bij benadering het gedrag van kleine variaties $df(x_0)$ van f rond $f(x_0)$ als functie van kleine variaties dx van x rond x_0:
  $$df(x_0) = f(x_0 + dx) - f(x_0) = f_x(x_0)dx + O(2)$$
- Linearisatie Systeem rond een (werk) punt
  $$\dot{x} = f(x,u),\quad y = g(x,u),\quad f, x \in R^n,\ u \in R^m,\ y \in R^l$$
  $$A = f_x(x_0,u_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{\substack{x=x_0\\u=u_0}}$$
  $$B = f_u(x_0,u_0),\ C = g_x(x_0,u_0),\ D = g_u(x_0,u_0)$$

Gelineariseerd Systeem rond u_0, x_0

$$\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u \qquad A \in R^{n\times n},\ B \in R^{n\times m}$$
$$\delta y = C\delta x + D\delta u \qquad C \in R^{l\times n},\ D \in R^{l\times m}$$

Gelineariseerd systeem beschrijft het dynamisch gedrag van kleine variaties $\delta x, \delta u, \delta y$ rond $x_0, u_0, y_0 = g(x_0,u_0)$

Numeriek integreren (oplossen) van niet lineaire dynamische systemen in toestandsvorm

– $$\left.\begin{aligned} \mathring{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2 \ldots u_m, t) \\ \mathring{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2 \ldots u_m, t) \\ &\vdots \\ \mathring{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2 \ldots u_m, t) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\mathring{x} = f(x,u,t) \\ &x, f \in R^n \\ &u \in R^m \end{aligned}$$

Numerieke integratie op basis van 1^e orde Taylorreeks benadering (Euler integratie methode):

$$x_p(t_s + \Delta t) = x_p(t_s) + \underbrace{f_p(x(t_s), u(t_s), t_s)}_{\frac{dx_p(t_s)}{dt}} \cdot \Delta t$$

$p = 1, 2, \ldots n$

Dus:

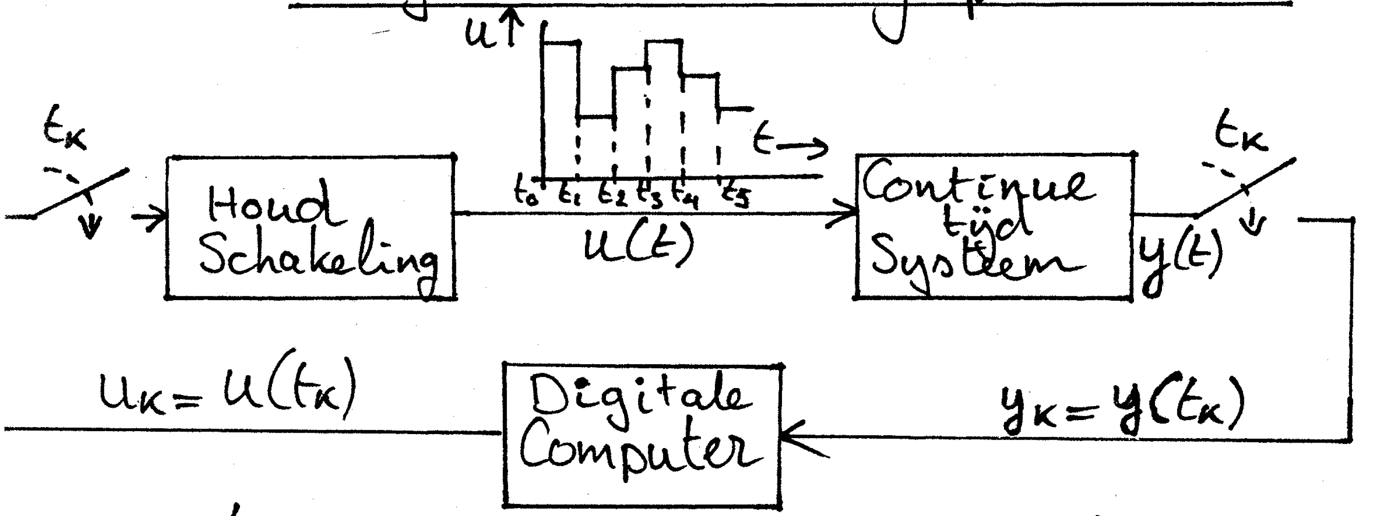
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Gegeven } x(t_0) \text{ en } u(t) \quad t_0 \leq t \leq t_f \\ \text{kan } x(t) \quad t_0 \leq t \leq t_f \text{ worden berekend}^* \end{array}}$$

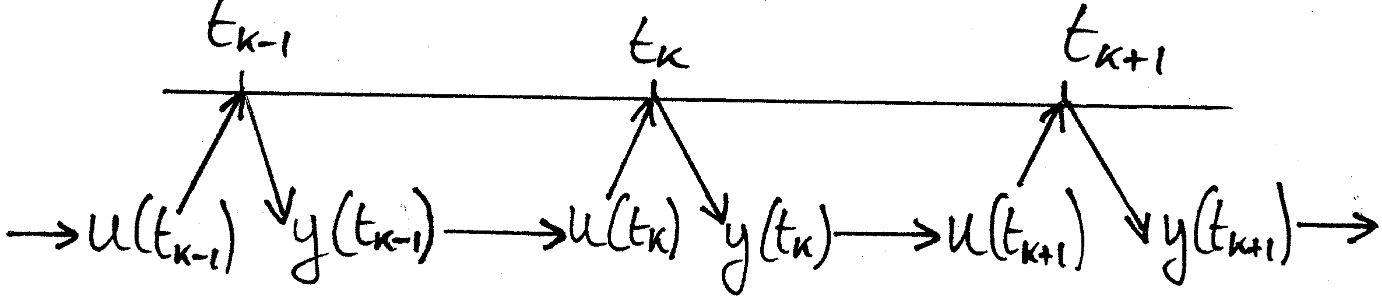
* $\Delta t \to 0$ uitkomst Euler integratie $\longrightarrow$ echte oplossing

Kleinere Δt, meer stappen binnen $[t_0, t_f]$ meer rekenwerk, nauwkeuriger uitkomst

– Oplossing voor (niet lineaire) discrete tijd systemen volgt rechtstreeks uit de differentie vergelijkingen

Digitale Regelsystemen en Digitale Besturingsproblemen





Continue tijd systeem : $\dot{x} = f(x,u,t)$
Begintoestand : $x(t_0) = x_0$
Sturing : $u(t) = u_k,\ t \in [t_k, t_{k+1})$
Kostenfunctie : $J(u) = \int_{t_0}^{t_N} L(x,u,t)\,dt$

Digitaal Optimaal Besturingsprobleem:

Vind de stapvormige sturing $u^*(t) = u^*_k$ $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \dots N-1$, zodat $J(u^*(t))$ minimaal is

Taak Computer, $t \in [t_k, t_{k+1})$: Bereken $u_{k+1} = u(t_{k+1})$ op basis van $y_k = y(t_k)$ (evt. y_{k-1}, y_{k-2})

Equivalent Discreet Optimaal Besturingsprobleem

$$J(u(t)) = \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}} L(x,u,t)\,dt}_{L_k(x_k,u_k)}$$

$L_k(x_k,u_k)$: functie van x_k, u_k te berekenen via numerieke integratie

$$\dot{x} = f(x,u,t) \quad x(t_{k+1}) = \underbrace{x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x,u,t)\,dt}_{f_k(x_k,u_k)}$$

$f_k(x_k,u_k)$: functie van x_k, u_k te berekenen via numerieke integratie

EDOB: $x_{k+1} = f_k(x_k,u_k)$, x_0

$$J(u_k) = \sum_{k=0}^{N-1} L_k(x_k,u_k)$$

waarbij

$$u_k = u(t_k) \qquad k \longleftrightarrow t_k$$

$$x_k = x(t_k)$$

$$J(u_k) = J(u(t)) \quad u(t) = u_k,\ t \in [t_k, t_{k+1})$$

Minimaliseren van scalaire (kosten) functies met en zonder beperkingen

- Zonder beperkingen:
  $L(u)$, $u \in R^m$, $L \in R^1$
  Noodzakelijke voorwaarde: $L_u = 0$ $\left(L_u = \frac{\partial L}{\partial u}\right)$
  Voldoende voorwaarden: $L_u = 0 \vee L_{uu} > 0$
  $L(u)$ lokaal minimum
- Met beperkingen:
  $L(u,x)$, $u \in R^m$, $x \in R^n$, $L \in R^1$
  beperking: $f(x,u) = 0$
  Dus u en x zijn afhankelijke vectoren (de componenten van deze vectoren zijn afhankelijk)

1) Definieer Hamiltonfunctie $H(x,u,\lambda)$:
   $H(x,u,\lambda) = L(x,u) + \lambda^T f(x,u)$ *
2) Minimaliseer H m.b.t. de <u>onafhankelijke</u> vectoren x, u, λ:
   Noodzakelijke voorwaarden $H_\lambda = H_x = H_u = 0$
   Voldoende voorwaarden $H_\lambda = H_x = H_u = 0$
   $\vee\ H_{uu} - f_u^T f_x^{-T} H_{xu} - H_{ux} f_x^{-1} f_u + f_u^T f_x^{-T} H_{xx} f_x^{-1} f_u > 0$
   $L(u,x)$ lokaal minimum

* λ: Vectoren met Lagrange multipliers

Algemeen Discreet Optimaal Sturings Probleem

- Systeemmodel

  $x_{k+1} = f_k(x_k, u_k) \quad k = 0, 1, 2, \ldots N-1$

  $x_k, f \in R^n, \; u_k \in R^m$

- Begintoestand

  $x_0, \; x_0 \in R^n$

- Kostenfunctie (Criterium)

  $J(u_k) = \emptyset(x_N, N) + \sum_{k=0}^{N-1} L(x_k, u_k), \; \emptyset, L \in R^1$

- Eindbeperking (voorwaarden op eindtijd N)

  $\psi(x_N, N) = 0$

Bekend: $x_0, f_k, L_k, \emptyset, \psi, N$

Discreet optimaal sturingsprobleem:

Vind de optimale sturing $u_k^*, \; k = 0, 1, \ldots N-1$

zodat $J(u_k^*)$ minimaal <u>en</u> $\psi(x_N, N) = 0$

Minimaliserings (optimaliserings) probleem met beperkingen namelijk systeem en eindbeperkingen

$u_k^*, \; k = 0, 1, 2, \ldots N-1$: Optimale sturing

$x_k^*, \; k = 0, 1, 2, \ldots, N$: Optimale baan (pad trajectorie)

Noodzakelijke voorwaarden oplossing discreet optimaal sturingsprobleem

Definieer Hamiltonfunctie (Hamiltoniaan)

$$H^k(x_k, u_k, \lambda_{k+1}) = L^k(x_k, u_k) + \lambda_{k+1}^T f^k(x_k, u_k)$$

Noodzakelijke voorwaarden oplossing:

- $x_{k+1} = H_{\lambda_{k+1}}^{k^T} = f^k(x_k, u_k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$

  systeem (toestands) vergelijking
- $\lambda_k = H_{x_k}^{k^T} = f_{x_k}^{k^T} \lambda_{k+1} + L_{x_k}^{k^T}$

  cotoestandsvergelijking (toegevoegd systeem)
- $0 = H_{u_k}^{k^T} = f_{u_k}^{k^T} \lambda_{k+1} + L_{u_k}^{k^T}$

  Stationaire voorwaarde
- $\psi(x_N, N) = 0$

  Eindbeperking
- $(\phi_{x_N} + \nu^T \psi_{x_N} - \lambda_N^T)\, dx_N = 0$

  ν: vector met Lagrange multipliers

  λ_k: vectoren met Lagrange multipliers

Noodzakelijke voorwaarden vormen tweepuntsrandwaarde probleem

- Uit stationaire voorwaarde volgt u_k als functie van x_k en λ_{k+1}
- Invullen in systeem en cotoestands vergelijking : u_k geëlimineerd
- Dan $2n$ differentiaal vergelijkingen
- Voor oplossing $2n$ randvoorwaarden nodig
- Voor oplossing $\nu \in R^p$ p rand voorwaarden nodig
- Totaal : $2n+p$ randvoorwaarden nodig
- Gegeven

$$\underbrace{x_0}_{n \text{ randvwdn}}, \ \underbrace{\psi(x_N, N)=0}_{p \text{ randvwdn}}, \ \underbrace{(\phi_{x_N} + \nu^T \psi_{x_N} - \lambda_N^T)\, dx_N = 0}_{n \text{ randvwdn.}}$$

totaal : $2n+p$ randvoorwaarden

- Tweepunts randwaarde probleem : randvoorwaarden deels op begin en deels op eindtijd

Numerieke methodes voor het oplossen van discrete optimale besturingsproblemen

- Functie minimalisatie:

  $J(u_k)$ $k = 0, 1, 2, \ldots N-1$ functie van uitsluitend u_k. De resterende informatie voor het berekenen van $J(u_k)$ ligt vast in het optimale besturingsprobleem

  In het geval van een equivalent discreet probleem van een digitaal optimaal besturingsprobleem wordt $J(u_k)$ o.a. via numerieke integratie berekend

- Oplossing noodzakelijke voorwaarden: 2 punts randwaarde probleem

  Stel geen eindvoorwaarden:

  $\psi \equiv 0$ (wordt niet gebruikt)

  dan $\lambda_N = \phi_{x_N}$

Gradient Algoritmes

1) Bepaal een beginschatting van de sturing u_k, $k = 0, 1, 2, \ldots N-1$
2) Itereer de systeemvgl. m.b.v. deze sturing en sla het verloop x_k, $k = 0, 1, 2, \ldots N$ op. Bepaal $J(u_k)$
3) Itereer m.b.v u_k, x_k de cotoestands vergelijkingen vanaf $\lambda_N = \varnothing_{x_N}$ terug in de tijd en sla het verloop van λ_k op
4) Bepaal $u_k' = u_k + \alpha H_{u_k}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, $\alpha < 0$. Bereken $J(u_k')$. Varieer α zodanig dat $J(u_k')$ zo klein mogelijk wordt in ieder geval $J(u_k') < J(u_k)$: line search α
5) Herhaal 3), 4) totdat er geen lagere kosten worden gevonden of de afname beneden een tolerantie valt : $u_k^* = u_k'$
6) Test $H_{u_k^*} \approx 0$

Numerieke berekening van afgeleide functies

- Scalaire functie van 1 variabele

$f(x)$, $f, x \in R^1$

$$f_x(x_0) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad 1) \quad \underline{\text{of}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x} \quad 2)$$

- Numerieke berekening: Kies Δx voldoende klein

  1) $\Delta x > 0$: forward difference
     $\Delta x < 0$: backward difference

  2) Central difference

- Scalaire functies van vectoren en vectorfuncties: Elementen partiële afgeleiden van scalaire functies naar 1 variabele. Dus herhaald uitvoeren bovenstaande procedure waarbij uitsluitend de betreffende variabele wordt gevarieerd.

On-line berekening van Stuurcorrecties: Oplossen van LQ problemen

- Afwijkingen klein: Goede beschrijving middels gelineariseerd model
- Fout als gevolg van linearisatie $O(2)$ 2e en hogere orde termen
- Afwijkingen klein: $O(2)$ voornamelijk bepaald door kwadratische termen.
- Een kwadratisch criterium minimaliseert kwadratische termen
- Een kwadratisch criterium minimaliseert de fouten t.g.v. linearisatie
- Systeem lineair, kosten criterium kwadratisch: LQ probleem: Oplossing in teruggekoppelde vorm! Dus snel on-line te berekenen!

Tijdafhankelijke Lineaire Systemen: Overdrachtsmatrix en Oplossing

- linearisatie rond optimale baan $u^*(t)$, $x^*(t)$: Tijdafhankelijk lineair systeem

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

- Oplossing gegeven $x(t_0)$ en $u(t)$:

$$x(t) = \underbrace{\Phi(t,t_0)\,x(t_0)}_{\text{Free (initial state) response}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \Phi(s,t_0)B(s)u(s)\,ds}_{\substack{\text{Forced response} \\ \text{(gevolg van sturing)}}}$$

Indien $A(t) = A$, $\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}$

$e^{A} = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 + \ldots$ Matrix $n \times n$

- $\Phi(t,t_0)$: Overdrachtsmatrix (van t_0 naar t)
  eigenschap Φ: $\Phi(t_2,t_0) = \Phi(t_2,t_1)\,\Phi(t_1,t_0)$
- Numerieke berekening Φ voor $A(t)$:
  benader $A(t)$ op kleine intervallen $[t_{i+1}, t_i)$
  met constante matrices $A_i = \frac{1}{2}\left[A(t_{i+1}) + A(t_i)\right]$
  Dan $\Phi(t_k,t_0) = \prod_{i=0}^{k} \Phi(t_{i+1},t_i) = \underbrace{\prod_{i=0}^{k} e^{A_i(t_{i+1}-t_i)}}_{\substack{\text{Recursief te berekenen} \\ \text{vooruit in de tijd}}}$

Kwadratische Vormen

$x \in \mathbb{R}^n$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- Euclidische norm:
  $\|x\|^2 = x^T x \geq 0 \quad \forall x$
- norm met betrekking tot een matrix
  $(Sx)^T Sx = x^T S^T S x = \|x\|_{S^T S} = \|x\|_P \geq 0$ *
- Kwadratische vorm: $x^T P x$
  $P = P_s + P_a$, $P_s = P_s^T$, $P_a = -P_a^T$
  $P_s = (P + P^T)/2$, $P_a = (P - P^T)/2$
  $x^T P_a x = (x^T P_a x)^T = x^T P_a^T x = -x^T P_a x = 0$
- $x^T P x = x^T P_s x$
- Definities voor symmetrische matrices (P_s)
  1. $P_s > 0 \iff x^T P_s x > 0 \quad \forall x, x \neq 0$
  2. $P_s \geq 0 \iff x^T P_s x \geq 0 \quad \forall x, (x \neq 0)$
  3. $P_s < 0 \iff x^T P_s x < 0 \quad \forall x, x \neq 0$
  4. $P_s \leq 0 \iff x^T P_s x \leq 0 \quad \forall x, (x \neq 0)$

1. P_s positief definiet
2. P_s semi positief definiet
3. P_s negatief definiet
4. P_s semi negatief definiet

niet 1, 2, 3, 4: P_s indefiniet

* Als $P = S^T S$ dan per definitie $S = \sqrt{P}$
$\sqrt{P}$ is <u>niet</u> uniek en $P = P_s \geq 0$

Digitaal Tijdafhankelijk LQ probleem en omzetting naar equivalent discreet LQ probleem

- $\dot{x} = A(t)x + B(t)u\ ,\ x(t_0)$

$$J(u(t)) = x^T(t_N)\,H\,x(t_N) + \int_{t_0}^{t_N} x^T Q(t)x + u^T R(t) u\,dt$$

$$u(t) = u(t_k),\ t \in [t_{k+1}, t_k)$$

- $J(u(t)) = J(u_k) = x^T(t_N)Hx(t_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L_k$

$$L_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} x^T Q(t)x + u^T R(t)u\,dt$$

$$x(t) = \Phi(t,t_k)x(t_k) + \underbrace{\int_{t_k}^{t} \Phi(s,t_k)B(s)\,ds}_{\Gamma(t,t_k)} . u(t_k)$$

$$t \in [t_{k+1}, t_k)$$

$$x(t) = \Phi(t,t_k)x(t_k) + \Gamma(t,t_k)u(t_k) \quad t \in [t_k, t_{k+1})$$

$$L_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} [\Phi(t,t_k)x(t_k) + \Gamma(t,t_k)u(t_k)]^T Q(t)\, [\Phi(t,t_k)x(t_k) + \Gamma(t,t_k)u(t_k)] + u^T(t_k)R(t)u(t_k)\,dt$$

$u(t_k)$, $x(t_k)$ constant dus buiten integraal te plaatsen

$$L_K = \underbrace{x^T(t_K) \int_{t_K}^{t_{K+1}} \Phi^T(t,t_K) Q(t) \Phi(t,t_K) dt}_{Q_K} \; x(t_K) +$$

$$2x^T(t_K) \underbrace{\int_{t_K}^{t_{K+1}} \Phi^T(t,t_K) Q(t) \Gamma(t,t_K) dt}_{M_K} \; u(t_K) +$$

$$u^T(t_K) \underbrace{\int_{t_K}^{t_{K+1}} \Gamma^T(t,t_K) Q(t) \Gamma(t,t_K) + R(t) dt}_{R_K} \; u(t_K)$$

$$x(t_K) \rightarrow x_K \quad u(t_K) \rightarrow u_K \quad t_K \rightarrow K$$

- Equivalent discreet LQ probleem

$$x_{K+1} = \Phi_K x_K + \Gamma_K u_K \;, \; x_0$$

$$J(u_K) = x_N^T H x_N + \sum_{K=0}^{N-1} x_K^T Q_K x_K + 2x_K^T M_K u_K + u_K^T R_K u_K$$

$$\Phi_K = \Phi(t_{K+1}, t_K) \;, \; \Gamma_K = \Gamma(t_{K+1}, t_K)$$

$$Q_K = \int_{t_K}^{t_{K+1}} \Phi^T(t,t_K) Q(t) \Phi(t,t_K) dt$$

$$M_K = \int_{t_K}^{t_{K+1}} \Phi^T(t,t_K) Q(t) \Gamma(t,t_K) dt$$

$$R_K = \int_{t_K}^{t_{K+1}} \Gamma^T(t,t_K) Q(t) \Gamma(t,t_K) + R(t) dt$$

$\Phi(t,t_K), \Gamma(t,t_K), Q_K, M_K, R_K$ numeriek te berekenen vooruit in de tijd op basis van $A(t_i), B(t_i), Q(t_i), R(t_i)$ t_i: tijdstippen binnen $[t_K, t_{K+1})$

Oplossing Equivalente Discrete LQ Probleem

- $u_k^* = -L_k x_k$

$$L_k = (\Gamma_k^T S_{k+1} \Gamma_k + R_k)^{-1} (\Gamma_k^T S_{k+1} \Phi_k + M_k^T)$$

*2 $$S_k = (\Phi_k^T - M_k R_k^{-1} \Gamma_k^T) \left[S_{k+1} - S_{k+1} \Gamma_k (\Gamma_k^T S_{k+1} \Gamma_k + R_k)^{-1} \cdot \Gamma_k^T S_{k+1} \right] (\Phi_k - \Gamma_k R_k^{-1} M_k^T) + Q_k - M_k^T R_k M_k$$

$$S_N = H$$

$$J^*(u_k) = x_0^T S_0 x_0$$

- L_k, $J^*(u_k)$ off-line (van te voren) te berekenen (idem S_k)
- Oplossing in <u>teruggekoppelde vorm</u>*1: on-line alleen

  $u_k = -L_k x_k$: matrix vector vermenigvuldingen

*1 Optimale sturing op tijdstip k alleen functie van toestand op tijdstip k (i.h.a. alleen functie van $x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, - x_0$)

*2 <u>Riccati</u> vergelijking

Alternatieve vormen Discrete Riccati vergelijking

$$S_K = (\Phi_K - \Gamma_K L_K)^T S_{K+1} (\Phi_K - \Gamma_K L_K) + L_K^T R_K L_K + Q_K - M_K L_K - L_K^T M_K^T$$

$$S_K = \Phi_K^T S_{K+1} \Phi_K - L_K^T (\Gamma_K^T S_{K+1} \Gamma_K + R_K) L_K + Q_K$$

Modellering Onzekerheid in Systeem en Waarnemingen middels additieve witte Gausische ruis: LQG probleem

$$x_{K+1} = \Phi_K x_K + \Gamma_K u_K + v_K$$

$$y_K = C_K x_K + w_K$$

$$E[x_0] = \bar{x}_0 \quad E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T] = G$$

v_K, w_K : discrete witte Gausische meet en systeem ruis

$$E[v_K] = 0, \; E[w_K] = 0$$

$$E[v_K v_K^T] = \mathbf{V}_K, \; E[w_K w_K^T] = \mathbf{W}_K, \; \mathbf{V}_K \in R^{n \times n}, \mathbf{W}_K \in R$$

$\mathbf{V}_K, \mathbf{W}_K$: Gegeven Covariantie matrices van witte ruis (processen) v_K, w_K

$$J(u_K) = E\left[x_N^T H x_N + \sum_{K=0}^{N-1} x_K^T Q_K x_K + 2 x_K^T M_K u_K + u_K^T R_K u_K\right]$$

- Bekend: $\Phi_K, \Gamma_K, C_K, \mathbf{V}_K, \mathbf{W}_K, \bar{x}_0, G, H, Q_K, M_K, R_K, N$
- Optimale sturing: $u_K^* = -L_K \hat{x}_K$

$\hat{x}_K$: Schatter x_K op basis van $y_{K-1}, y_{K-2}, \ldots y_0$

<u>Kalman schatter/filter</u> of $y_K, y_{K-1}, \ldots y_0$

Dualiteit LQ probleem en Kalman Schatter probleem

- Oplossing LQ probleem:

  $u_k = -L_k x_k$

  L_k: optimale terugkoppeling bepaald door:

  $\Phi_k, \Gamma_k, Q_k, R_k, (M_k), H$

- Kalman Schatter:

  $\hat{x}_{k+1} = \Phi_k \hat{x}_k + \Gamma_k u_k + K_k(y_k - C_k \hat{x}_k)$

  K_k: Kalman Gain; $\hat{x}_k$ minimum variantie schatter

  K_k bepaald door:

  $\Phi_k, C_k, V_k, W_k, (X_k), G$

- De Riccati vergelijking en uitdrukking voor L_k bepalen eveneens K_k als

  $\Phi_k \to \Phi_k^T,\ \Gamma_k \to C_k^T,\ Q_k \to V_k,\ R_k \to W_k$

  $(M_k \to X_k),\ H \to G$

  De Riccati vergelijking voor K_k loopt Vooruit in de tijd. De beginvoorwaarde is $S_0 = G$ (vergelijk $S_N = H$ voor L_k)

- L_k, K_k (Kalman Schatter) vormen samen de oplossing van het LQG probleem. On-line zijn alleen een beperkt aantal matrix vector vermenigvuldigingen nodig.

Digitaal LQG probleem en omzetting naar equivalent discreet LQG probleem

- Systeem: $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + v(t)$

  $v(t)$: continu witte ruis proces met bekende covariantiematrix $V(t)$:

  $E[v(t)] = 0$, $E[v(t)v^T(t)] = V(t) \geq 0$

  Van begintoestand $x(t_0)$ zijn gemiddelde en covariantie bekend:

  $E[x(t_0)] = \bar{x}_0$, $E[(x(t_0)-\bar{x}_0)(x(t_0)-\bar{x}_0)^T] = G \geq 0$

- Waarnemingen (metingen)

  $y(t_k) = C(t_k)x(t_k) + w(t_k)$: $y_k = C_k x_k + w_k$

  $w(t_k) = w_k$: discreet witte ruis proces met bekende covariantiematrix W_k

  $E[w_k] = 0$ $E[w_k w_k^T] = W_k > 0$

- Kosten functie (criterium)

  $$J(u(t)) = E[x^T(t_N)Hx(t_N)] + E\left[\int_{t_0}^{t_N} x^TQ(t)x + u^TR(t)u\,dt\right]$$

- Sturing $u(t) = u(t_k)$, $t \in [t_{k+1}, t_k)$, $k = 0, 1, - N-1$

- Omzetting: $A(t), B(t), V(t) \rightarrow \Phi_k, \Gamma_k, V_k$

  $A(t), B(t), Q(t), R(t) \rightarrow Q_k, R_k, M_k$

  $\bar{x}_0, G, H$ onveranderd

Continue Optimale Besturingsproblemen

- Digitale optimale besturingsproblemen met $t_{k+1} - t_k \to 0$: $u(t)$ continue functie van t. Nu vrije eindtijd $t_N = T$ mogelijk
- Systeem: $\dot{x} = f(x,u,t)$, $x(t_0) = x_0$, $x \in R^n$
- Kostenfunctie: $J(u(t)) = \phi(x(T),T) + \int_{t_0}^{T} L(x,u,t)\,dt$
- Eindbeperkingen: $\psi(x(T),T) = 0$, $\psi \in R^p$
- Noodzakelijke voorwaarden oplossing

  $H(x(t),u(t),\lambda(t),t) = L(x(t),u(t),t) + \lambda^T(t) f(x(t),u(t),t)$

  $\dot{x} = H_\lambda^T = f$: systeemvergelijking

  $-\dot{\lambda} = H_x^T = f_x^T \lambda + L_x^T$: cotoestandsvergelijking

  $0 = H_u^T = f_u^T \lambda + L_u^T$: stationaire voorwaarde

  Randvoorwaarden:

  $x(t_0)$, $\psi(x(T),T) = 0$

  $\left[\phi_{x(T)} + \nu^T \psi_{x(T)} - \lambda^T(T)\right] dx(T) = 0$, $\nu \in R^p$

  $\left[\phi_T + \nu^T \psi_T + H(T)\right] dT = 0$

  bewijs: $H(T) = H|_T$
- $u(x,\lambda)$ invullen: Tweepunts randwaarde probleem

Stuurbeperkingen

- $u(t) \in \mathcal{U}$, $u_k \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$: begrensde verzameling
  Voorbeeld: $u^{min} \leq u \leq u^{max}$, $u^{min}, u^{max}, u \in R^m$
  d.w.z. $u_i^{min} \leq u_i(t) \leq u_i^{max}$, $i = 1, 2, --, m$: index component vector

- Noodzakelijke voorwaarden onveranderd behalve stationaire voorwaarde:
  $H_u^T = 0 \longrightarrow H(x^*, u^*, \lambda^*, t) \leq H(x^*, u, \lambda^*, t)$
  Ofwel: <u>Minimaliseer H met betrekking tot $u \in \mathcal{U}$</u>

- Gradient methodes: Ongewijzigd behalve de line-search: $u'(t) \in \mathcal{U}$, beperking zoek ruimte, numeriek gunstig

- Functie minimalisatie $\longrightarrow$ Functieminimalisatie binnen begrensde verzameling $u \in \mathcal{U}$. Diverse standaard methodes beschikbaar: Beperking numeriek gunstig.

Digitaal/Discreet/Continu optimaal besturingsprobleem

- In tegenstelling tot het college worden digitale optimale besturingsproblemen in de praktijk en literatuur (o.a. Lewis!) vaak ***benaderd*** door of continue of discrete optimale besturingsproblemen

- Benadering in het geval van een continu optimaal besturingsprobleem : Sturing is niet continu maar stapvormig. Benadering alleen acceptabel als ***bemonsterintervallen klein t.o.v. de tijdconstanten van het systeem***.

- Benadering in het geval van een discreet optimaal besturingsprobleem : Er wordt, gegeven het equivalente discrete systeem, een discreet criterium ***gekozen*** door de ontwerper (in tegenstelling tot het equivalente discrete criterium dat wordt ***afgeleid uit een continu (integraal) criterium***). De keuze van het discrete criterium bepaalt per definitie de kosten gemaakt ***op*** de bemonstertijdstippen en ***niet*** de kosten gemaakt ***tussen*** bemonstertijdstippen. De eerste zijn slechts een redelijke afspiegeling van de tweede als de bemonsterintervallen opnieuw klein zijn t.o.v. de tijdconstanten van het systeem.

- ***Alleen*** de equivalente discrete aanpak (d.w.z. zowel het equivalente discrete systeem als het equivalente discrete criterium worden gebruikt) leidt tot een oplossing van een digitaal optimaal besturingsprobleem die, ***zonder benaderingen***, kan worden geimplementeerd in een computer en waarbij de bemonsterintervallen ***willekeurig*** kunnen worden gekozen.

- De ***minimale kosten*** van een digitaal optimaal besturingsprobleem ***zijn wel afhankelijk van de keuze van de bemonsterintervallen.*** I.h.a. zijn de kosten hoger bij grotere bemonsterintervallen. Deze kostentoename heeft te maken met het feit dat de sturing in het geval van grotere bemonsterintervallen minder vaak kan worden aangepast. ***Alleen middels de equivalente discrete aanpak kunnen de kosten als functie van de lengte van bemonsterintervallen worden berekend***.

- Het equivalente discrete optimale besturingsprobleem van een digitaal optimaal besturingsprobleem is niet wezenlijk ingewikkelder dan een benaderd discreet probleem met een gekozen discreet criterium. ***De equivalente discrete methode verdient daarom altijd de voorkeur omdat deze geen benaderingen bevat en willekeurige bemonsterintervallen toestaat***.

Belangrijke punten bij het examen :

- Gesloten boek, alleen rekenmachine

- Formulering algemeen digitaal/discreet/continu optimaal besturingsprobleem en betekenis alle daarin voorkomende symbolen. Karakteristieke verschillen tussen deze problemen (Sheet 22,24,39)

- Vertaling van een probleem in 1 van bovenstaande algemene vormen. D.w.z. transformeren van stelsels gekoppelde differentiaal (differentie) vergelijkingen in 1e orde vorm (toestandsvorm). Vertalen van eissen in een wiskundige kostenfunctie (integraal of som met evt. eindterm). Vertaling van eissen in evt. eindvoorwaarden

- Noodzakelijke voorwaarden voor de oplossing van de drie bovenstaande besturingsproblemen (Sheet 25,26,39). Procedure gradient methode en functie-minimalisatie (Sheet 27,28,29). Invloed van stuurbeperkingen op optimale besturingsproblemen en daarbij behorende noodzakelijke voorwaarden (Sheet 40)

- Principe van omzetting digitaal naar equivalent discreet optimaal besturingsprobleem (Sheet 22). Voordelen equivalent discrete aanpak t.o.v. aanpak met gekozen discreet criterium (Sheet 41).

- Blokschema van een digitale optimale besturing (Sheet 1,5,6,7,21)

- Motivatie LQG besturingsprobleem voor ontwerp compensator (stuurcorrectiemechanisme) (Sheet 30). Overwegingen keuze ontwerp parameters LQG probleem (Nietineariteit, onzekerheid in systeem en waarnemingsvergelijkingen). Omzetting digitaal naar equivalent discreet LQG probleem (Sheet 33,34,38)

Uitbreidingen/variaties/aanpassingen van digitale optimale besturing

- Herhaald on-line oplossen (digitaal) optimaal besturingsprobleem : ***Receding Horizon Optimal Control*** :
  $J(u_i, \hat{x}_k(y_{k-1}, y_{k-2}, .. y_0))$, $i = k, k+1, .., k+N$, Horizon lengte N ofwel $t_{k+N} - t_k$. Terugkoppeling d.m.v. $\hat{x}_k(y_{k-1}, y_{k-2}, .. y_0)$ dus stuurcorrectiemechanisme niet nodig (al aanwezig)

- Ontwerp ***gereduceerde-orde compensatoren*** : Dimensie compensator (LQG stuurcorrectiemechanisme) ***vast*** en ***kleiner*** dan die van het systeem. Vooral van belang bij ***hoog of oneindig dimensionale systemen***.

- Additieve witte systeem en waarnemingsruis kunnen systemen niet destabiliseren en zijn dus "milde" vormen van onzekerheid. Stochastische parameters (parameters van het systeem zijn stochastische variabelen) kunnen dit wel. Het ontwerp en de numerieke berekening van Digitale gereduceerde-orde LQG compensatoren voor systemen met stochastische parameters is mogelijk (recent onderzoeksresultaat). Hiermee zijn dus ***robuuste gereduceerde-orde LQG compensatoren te ontwerpen***

- Wanneer op bemonstertijdstippen niet ***alle*** stuurvariabelen worden aangepast en/of niet ***alle*** uitgangen waargenomen spreekt men van ***asynchroon bemonsteren***. De digitale optimale besturingsaanpak van het college kan relatief eenvoudig worden aangepast voor deze meer algemene situatie (recent onderzoeksresultaat).

- Men kan in de praktijk te maken hebben met bemonstertijdstippen welke stochastische variabelen zijn (***stochastische bemonstering***). Dit kan het gevolg zijn van intrinsieke eigenschappen van het meetinstrument of omdat men ***met opzet*** stochastisch bemonstert.

- In het geval van stochastische bemonstering van systemen (met deterministische dus geen stochastische parameters) kunnen eveneens gereduceerde-orde LQG compensatoren worden ontworpen (recent onderzoeksresultaat)

- ***Adaptief regelen***. Informatie uit metingen niet alleen gebruiken voor het schatten van toetandsafwijkingen maar ook gebruiken voor het ***on-line aanpassen van het model*** (het niet lineaire en/of het gelineariseerde model). Vooral van toepassing in combinatie met Receding Horizon Optimal Control. Stabiliteit is vaak een probleem!!

Onderzoek

- Toepassing theorie en algoritmes op industriele processen :
  Droog, fermentatie, sterilisatie processen / Robotbesturing / Besturing van ploegen / Klimaatbesturing (kas, stal, bewaarplaatsen, stadions, ijshallen)

- Onderzoek naar :
  relatie stabiliteit en LQ(G) kosten criterium
  minimale afmetingen van LQG compensatoren in relatie tot het LQG probleem
  Aanpassen gradient algoritmes voor (digitale en continue) problemen met vrije eindtijd
  digitaal optimale besturing van ploegen
  digitaal optimale besturing van een (tomaten pluk) robot
  digitaal optimaal compenseren van een droogproces
  Invloed van niet perfecte toestandsinformatie op (digitale) Receding Horizon Optimal Controllers (in het bijzonder die voor een sterilisatie proces)

Tentamen Optimaal Sturen 7-4-'92 9.00-12.00 uur. 4 opgaven, 2 blz.

1a) Beschrijf wiskundig de algemene vorm van een optimaal sturings probleem in de discrete tijd. Verklaar alle in de beschrijving voorkomende symbolen.

1b) Geef de noodzakelijke voorwaarden voor de oplossing van het probleem bedoeld in 1a). Geef aan hoe deze voorwaarden leiden tot een twee-punts randwaarde probleem.

Rustig en heel goed lezen en herlezen:
Met een veerboot, die vaart met een ***constante snelheid t.o.v. het water van 9 km/uur***, wil men ***zo snel mogelijk***, en ***zonder aan de overkant te zijn afgedreven***, een vaarwater oversteken. Het vaarwater is *31 km.* breed. In het vaarwater staat een waterstroom s in de lengte richting waarvan de sterkte varieert met de afstand tot de oever: $s(x)=5\sin(\pi x/31)$ *km/uur* waarbij x de afstand in *km* is loodrecht op de oever. De oevers worden parallel en recht verondersteld. De ***koers*** van de boot, d.w.z. ***de stand van de boot t.o.v. de oever***, is op ieder tijdstip ***vrij te kiezen***. De afmetingen van de boot zijn te verwaarlozen t.o.v. de oversteek.

2a) Maak een schets van het vaarwater, de waterstroom, en de boot (op een willekeurige positie in het vaarwater) met daarin wiskundige symbolen voor relevante grootheden.

2b) Formuleer m.b.v. het antwoord onder a) het optimale besturings probleem wat volgt uit deze omschrijving, d.w.z. bepaal een dynamisch model van het positie verloop van de boot als functie van o.a. de koers, bepaal de begin toestand, het criterium, en eventuele eindvoorwaarden. Het botsen van de boot tegen de oever op de eindtijd behoeft ***niet*** te worden beschreven.

2c) Bepaal de noodzakelijke voorwaarden voor de oplossing van dit probleem en zet deze om naar een twee-punts randwaarde probleem.

3a) Geef in wiskundige termen exact aan in welk opzicht een digitaal optimaal sturings probleem verschilt van een continu optimaal sturings probleem.

3b) Geef in wiskundige termen exact aan hoe ieder digitaal optimaal sturings probleem kan worden omgezet in een ***equivalent*** discreet optimaal sturings probleem. Langs welke weg zijn de functies $f_k(x_k, u_k)$ en $L_k(x_k, u_k)$ die respectievelijk voorkomen in de systeem vergelijking en het criterium van dit equivalente discrete optimale sturings probleem numeriek te berekenen?

4a) Door welke oorzaken leidt in praktische gevallen het aanbieden van de optimale sturing niet tot een optimaal verloop van de systeem toestand?

4b) Teneinde een bij benadering optimaal verloop van de systeemtoestand te realiseren wordt gebruik gemaakt van een stuurcorrectie mechanisme (compensator). In het college werd als compensator de oplossing van een LQ probleem gekozen. Geef in wiskundige termen de relatie aan tussen het LQ probleem en het oorspronkelijke optimale sturings probleem. Motiveer de keuze van een LQ compensator uit ***praktisch*** en ***theoretisch*** oogpunt.

Tentamen Optimaal Sturen A550-313.
15-8-1996, 9.00-12.00 uur.

Opgave 1 van 2.

Gegeven het volgens de gebruikelijke conventies genoteerde niet lineaire dynamische systeem:

$$\dot{x} = f(x,u,t),\ x\in\mathbb{R}^n,\ u\in\mathbb{R}^m \qquad (1)$$

a) Welke grootheid bepaalt één éénduidig het systeem gedrag? Hoe wordt deze grootheid genoemd?

b) Welke gegevens moeten bekend zijn wil het gedrag van het systeem volledig zijn bepaald tussen twee tijdstippen: $t\in[t_{k+1},t_k]$?

c) Geef de algemene vorm van een ***digitaal*** optimaal sturingsprobleem d.w.z. het probleem waarbij het systeem *(1)* wordt bestuurd door een digitale computer. d) Laat zien dat ieder ***digitaal*** optimaal sturingsprobleem kan worden omgezet in een ***equivalent*** discreet optimaal sturingsprobleem. Moet men een voorwaarde stellen t.a.v. de einddtijd van dit probleem? Zo ja welke?

e) Geef de noodzakelijke voorwaarden voor de oplossing van dit equivalente discrete optimale sturings probleem.

f) Is het aanbieden van de ***digitale*** optimale sturing in de praktijk voldoende om het optimale systeem gedrag te realiseren? Licht het antwoord toe. Zo niet welke maatregelen moeten er worden genomen, en hoe kunnen deze worden gerealiseerd gegeven de digitale computer als besturingseenheid?

g) Wat zijn de voordelen van de in het college behandelde stof t.o.v. de klassieke regeltheorie? Licht het antwoord toe?

Opgave 2 van 2.

Gegeven het volgende continue optimale sturings probleem:

Systeem vergelijkingen:

$$\ddot{p} = -\mathring{p}r + \mathring{q}^2$$
$$\ddot{q} = -\mathring{q}s + \mathring{p}^2$$

waarbij r en s stuurvariabelen zijn.

Te minimaliseren criterium:

$$(p(T)-p_r(T))^2+\int_0^T [(p(t)-p_r(t))^2+(q(t)-q_r(t))^2+r^2(t)+s^2(t)]dt$$

waarbij $p_r(t)$ en $q_r(t)$ **bekende** tijdfuncties zijn. Voorts is de eindtijd T bekend. Voorts moet worden voldaan aan de randvoorwaarden:

$$\mathring{p}(T) = q(T) \text{ en } \mathring{q}(T) = p(T).$$

a) Geef woordelijk weer welke zaken het te minimaliseren criterium nastreeft.

b) Zet de systeemvergelijkingen om in een verzameling eerste orde differentiaal vergelijkingen: $\mathring{x} = f(x,u)$.

c) Herschrijf het criterium in termen van toestands en stuurvariabelen die volgen uit a).

d) Wat moet er ten aanzien van de grootheden p en q bekend zijn wil de begintoestand x(0) van het systeem bekend zijn?

Ga in het vervolg uit van een bekende begintoestand x(0) van het systeem.

e) Formuleer het tweepuntsrandwaarde probleem dat volgt uit de noodzakelijke voorwaarden voor de oplossing van dit continue optimale sturings probleem.